~ CURS 11 ~

6. Legea fluxului magnetic

A. Forma generală integrală

Enunț: Fluxul magnetic prin orice suprafață închisă (Σ) este zero:

$$\Phi_{\Sigma} = 0 \tag{2.50}$$

sau, dezvoltând fluxul magnetic, se obține:

$$\oint_{\Sigma} \overline{\mathbf{B}} \cdot \overline{\mathbf{n}} \cdot dA = 0 \tag{2.51}$$

Prin analogie cu legea fluxului electric, putem concluziona:

- nu există corespondent al sarcinii electrice în câmp magnetic;
- liniile de câmp magnetic sunt linii închise;
- fluxul magnetic prin două suprafețe deschise ($S_{\Gamma 1}$ și $S_{\Gamma 2}$) ce se sprijină pe aceeași curbă închisă (Γ) este același.

Demonstrație: Se consideră o suprafață închisă Σ ce se poate descompune în două suprafețe deschise ($S_{\Gamma 1}$ și $S_{\Gamma 2}$) de-a lungul aceleiași curbe închise (Γ) (fig. 2.10):

$$\Phi_{\Sigma} = 0 \Rightarrow \Phi_{S_{\Gamma 1}} - \Phi_{S_{\Gamma 2}} = 0 \Rightarrow \Phi_{S_{\Gamma 1}} = \Phi_{S_{\Gamma 2}} \tag{2.52}$$

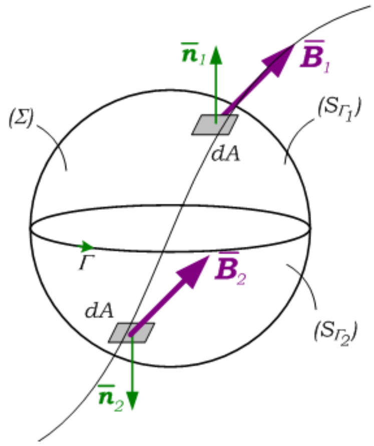

Fig. 2.10. Explicativă pentru consecința legii fluxului magnetic.

B. Forme locale

Pentru domeniile de variație continuă a mărimilor, aplicându-i membrului stâng al formei integrale teorema *G-O* se obține forma locală a legii:

$$div\overline{\mathbf{B}} = 0 \tag{2.53}$$

Folosind egalitatea operațională $div\, rot\overline{\mathbf{X}} = 0$ în relația anterioară, se poate introduce o mărime nouă numită *potențialul magnetic vector*, $\overline{\mathbf{A}}$:

$$\overline{\mathbf{B}} = rot\overline{\mathbf{A}} \tag{2.54}$$

Această mărime nu este complet definită prin relația anterioară, impunându-se și condiția de etalonare a câmpului magnetic ($div\,\overline{\mathbf{A}}=0$).Cu ajutorul acestei mărimi, fluxul magnetic poate fi calculat ca integrală pe o curbă, în loc de o suprafață:

$$\Phi_{S_\Gamma} = \int_{S_\Gamma} \overline{\mathbf{B}}\cdot\overline{\mathbf{n}}\cdot dA = \int_{S_\Gamma} rot\overline{\mathbf{A}}\cdot\overline{\mathbf{n}}\cdot dA = \oint_\Gamma \overline{\mathbf{A}}\cdot\overline{\mathbf{dl}} \qquad (2.55)$$

La o suprafață de discontinuitate (între două medii cu proprietăți magnetice diferite) se obține forma locală:

$$B_{2n} - B_{1n} = 0 \Rightarrow B_{2n} = B_{1n} \qquad (2.56)$$

relația de conservare a componentei normale a inducției magnetice:

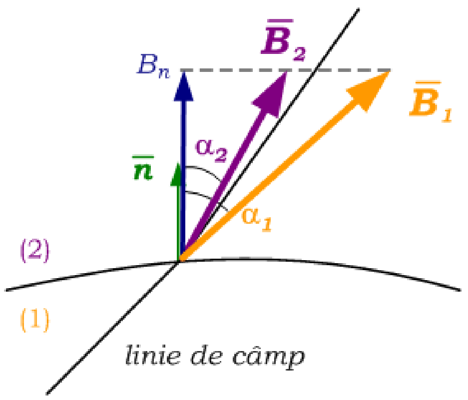

Fig. 2.11. Conservarea componentei normale a inducției magnetice.

7. Legea magnetizației temporare. Legea legăturii în câmp magnetic ($\overline{\mathbf{B}}$, $\overline{\mathbf{H}}$, $\overline{\mathbf{M}}$)

Enunț: Pentru diferite tipuri de materiale magnetice și în diferite regimuri de desfășurare în timp a fenomenelor magnetizația temporară este o funcție de intensitatea câmpului magnetic inductor.

$$\overline{\mathbf{M}}_t = f(\overline{\mathbf{H}}) \qquad (2.57)$$

- pentru o clasă largă de materiale, în regimuri staționare sau nu prea rapid variabile în timp, relația este de proporționalitate:

$$\overline{\mathbf{M}}_t = \chi_m \cdot \overline{\mathbf{H}} \quad \text{– materiale liniare și izotrope,} \qquad (2.58)$$

χ_m se numește susceptibilitatea magnetică.

- dacă $\chi_m = \chi_m\left(\overline{\mathbf{H}}\right)$ – materialele sunt neliniare și anizotrope;
- dacă materialul este anizotrop, dar caracterizat de o rețea cristalină, uniformă și continuă:

$$\overline{\mathbf{M}}_t = \overline{\overline{\chi}}_m \overline{\mathbf{H}} \qquad (2.59)$$

$\overline{\overline{\chi}}_m$ este tensorul susceptibilității magnetice.

Enunț: În orice moment de timp și în orice punct din spațiu, indiferent de regimul de variație al mărimilor, între inducția magnetică $\overline{\mathbf{B}}$, intensitatea câmpului magnetic $\overline{\mathbf{H}}$ și magnetizația $\overline{\mathbf{M}}$ există relația:

$$\overline{\mathbf{B}} = \mu_0\left(\overline{\mathbf{H}} + \overline{\mathbf{M}}\right) \tag{2.60}$$

Aceste două legi pot fi folosite împreună pentru materiale liniare, rezultând:

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{B}} &= \mu_0\left(\overline{\mathbf{H}} + \overline{\mathbf{M}}_t + \overline{\mathbf{M}}_p\right) = \mu_0\left(\overline{\mathbf{H}} + \chi_m\overline{\mathbf{H}}\right) + \mu_0\overline{\mathbf{M}}_p = \\ &= \mu_0(1+\chi_m)\overline{\mathbf{H}} + \mu_0\overline{\mathbf{M}}_p = \mu_0\mu_r\overline{\mathbf{H}} + \mu_0\overline{\mathbf{M}}_p = \mu\overline{\mathbf{H}} + \overline{\mathbf{I}}_p\end{aligned} \tag{2.61}$$

unde $\mu_r = (1+\chi_m)$ – *permeabilitatea magnetică relativă* a materialului și $\overline{\mathbf{I}}_p = \mu_0\overline{\mathbf{M}}_p$ se numește *polarizația magnetică*.

Pentru mediile lipsite de o polarizație magnetică permanentă relația devine:

$$\overline{\mathbf{B}} = \mu\overline{\mathbf{H}} \tag{2.62}$$

ceea ce arată că liniile de câmp ale celor două câmpuri de vectori sunt în acest caz coincidente.

Există și o categorie largă de materiale magnetice pentru care dependența ***B-H*** este neliniară și necunoscută analitic, materiale despre care se va discuta în capitolul următor.

8. Legea circuitului magnetic

A. Forma generală integrală

Enunț: Tensiunea magnetomotoare produsă în lungul unei curbe închise (Γ) este întotdeauna egală cu suma dintre intensitatea curentului electric de conducție ce străbate orice suprafață deschisă (S_Γ) mărginită de această curbă și viteza de creștere în timp a fluxului electric prin aceeași suprafață:

$$u_{mm\Gamma} = i_{S_\Gamma} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Psi_{S_\Gamma} \tag{2.63}$$

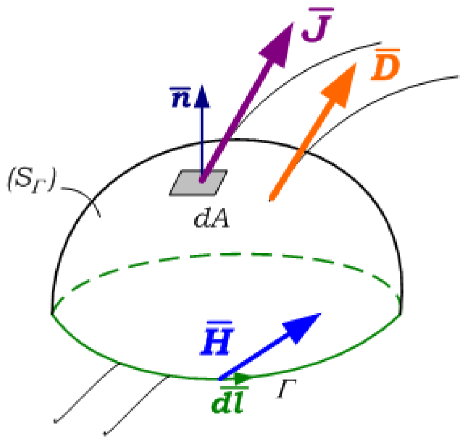

Fig. 2.12. Explicativă pentru legea circuitului magnetic.

în forma integrală se poate scrie:

$$\oint_\Gamma \overline{\mathbf{H}}\overline{\mathbf{dl}} = \int_{S_\Gamma} \overline{\mathbf{J}}\overline{\mathbf{n}}dA + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{S_\Gamma} \overline{\mathbf{D}}\overline{\mathbf{n}}dA \tag{2.64}$$

Membrul drept este o derivată de flux ce poate fi atașată unei suprafețe ce se deplasează cu viteza $\overline{\mathbf{v}}$, astfel încât termenul poate fi dezvoltat:

$$\oint_{\Gamma} \overline{\mathbf{H}} \cdot \overline{\mathbf{dl}} = \int_{S_\Gamma} \overline{\mathbf{J}} \cdot \overline{\mathbf{n}} dA + \int_{S_\Gamma} \left[\frac{\partial \overline{\mathbf{D}}}{\partial t} + \overline{\mathbf{v}} div \overline{\mathbf{D}} + rot\left(\overline{\mathbf{D}} \times \overline{\mathbf{v}}\right) \right] \overline{\mathbf{n}} dA \tag{2.65}$$

Fiecare dintre termenii membrului drept poartă o denumire specifică:

$i_{S_\Gamma} = \int_{S_\Gamma} \overline{\mathbf{J}}\overline{\mathbf{n}} dA$ – curentul electric de conducție;

$i_{cv_{S_\Gamma}} = \int_{S_\Gamma} \overline{\mathbf{v}} div \overline{\mathbf{D}}\overline{\mathbf{n}} dA = \int_{S_\Gamma} \overline{\mathbf{v}} \rho_v \overline{\mathbf{n}} dA$ – curentul electric de convecție;

$i_{D_{S_\Gamma}} = \int_{S_\Gamma} \frac{\partial \overline{\mathbf{D}}}{\partial t} \overline{\mathbf{n}} dA$ – curentul de deplasare. El exprimă cantitativ faptul că un câmp electric variabil în timp determină efecte magnetice, adică produce un câmp magnetic.

$i_{R_{S_\Gamma}} = \int_{S_\Gamma} rot\left(\overline{\mathbf{D}} \times \overline{\mathbf{v}}\right) \overline{\mathbf{n}} dA = \oint_{\Gamma} \left(\overline{\mathbf{D}} \times \overline{\mathbf{v}}\right) \overline{\mathbf{dl}}$ – curentul Röentgen.

B. Formele locale ale legii

Pentru domenii de continuitate şi netezime a proprietăților, cu ajutorul teoremei lui Stokes se obține o primă formă locală a legii:

$$rot \overline{\mathbf{H}} = \overline{\mathbf{J}} + \frac{\partial \overline{\mathbf{D}}}{\partial t} + \overline{\mathbf{v}} \rho_v + rot\left(\overline{\mathbf{D}} \times \overline{\mathbf{v}}\right) \tag{2.66}$$

Pentru medii imobile $\left(\overline{\mathbf{v}} = 0\right)$ se obține forma locală:

$$rot \overline{\mathbf{H}} = \overline{\mathbf{J}} + \frac{\partial \overline{\mathbf{D}}}{\partial t} \qquad \textit{numită prima ecuație a lui Maxwell} \tag{2.67}$$

În cazul suprafețelor de discontinuitate pentru proprietățile câmpului magnetic și medii imobile:

$$rot_s \overline{\mathbf{H}} = \overline{\mathbf{t}} \times \left(\overline{\mathbf{H}}2 - \overline{\mathbf{H}}1\right) = 0 \Rightarrow H_{2t} = H_{1t} \tag{2.68}$$

adică, la traversarea unei suprafețe de discontinuitate de către liniile câmpului magnetic, se conservă întotdeauna componenta tangențială a intensității acestui câmp.

9. Legea inducției electromagnetice

În 1831, Michael Faraday a pus în evidentă pe cale experimentală fenomenul inducției electromagnetice. El a efectuat o serie de teste demonstrând următoarele:

- prin variația unui câmp magnetic în care se introduce un conductor fix se induce tensiune;
- dacă se deplasează cu o viteză un conductor într-un câmp magnetic constant se induce tensiune;
- dacă există un sistem fix într-un câmp magnetic, dar se variază permeabilitatea magnetică a mediului se induce tensiune.

A. Forma generală integrală

Enunț: Tensiunea electromotoare indusă în lungul unei curbe închise (Γ) este egală cu viteza de scădere în timp a fluxului magnetic prin orice suprafață deschisă (S_Γ), mărginită de această curbă:

$$e_\Gamma = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_{S_\Gamma} \qquad (2.69)$$

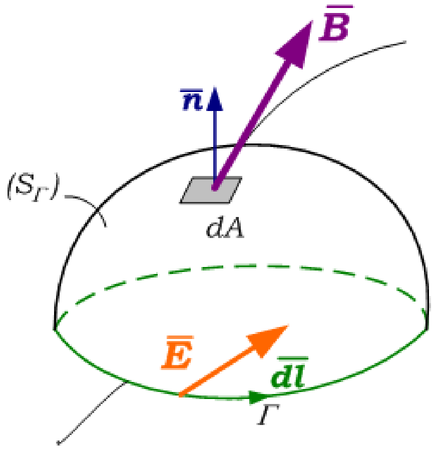

Fig. 2.13. Explicativă pentru legea inducției electromagnetice.

sau sub formă integrală:

$$\oint_\Gamma \overline{\mathbf{E}}\cdot\overline{\mathbf{dl}} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{S_\Gamma} \overline{\mathbf{B}}\cdot\overline{\mathbf{n}}\cdot dA \qquad (2.70)$$

<u>OBS</u>: Alături de legea fluxului electric, această lege se referă la posibilitățile concrete de producere a unui câmp electric.

Membrul drept este o derivată de flux ce poate fi atașată unei suprafețe ce se deplasează cu viteza $\overline{\mathbf{v}}$, astfel încât termenul poate fi dezvoltat:

$$\int_{S_\Gamma} \overline{\mathbf{B}}\cdot\overline{\mathbf{n}}\cdot dA = -\int_{S_\Gamma}\left[\frac{\partial\overline{\mathbf{B}}}{\partial t} + \overline{\mathbf{v}}div\overline{\mathbf{B}} + rot(\overline{\mathbf{B}}\times\overline{\mathbf{v}})\right]\overline{\mathbf{n}}dA \qquad (2.71)$$

Al doilea termen al dezvoltării este nul, ținând cont de legea fluxului magnetic (forma locală, $div\overline{\mathbf{B}}=0$); de asemenea, al treilea termen se transformă cu teorema lui Stokes, astfel încât legea inducției capătă forma:

$$\oint_\Gamma \overline{\mathbf{E}}\overline{\mathbf{dl}} = -\int_{S_\Gamma}\frac{\partial\overline{\mathbf{B}}}{\partial t}\overline{\mathbf{n}}dA + \oint_\Gamma\left(\overline{\mathbf{v}}\times\overline{\mathbf{B}}\right)\overline{\mathbf{dl}} \qquad (2.72)$$

Acești doi termeni sunt cei corespunzători celor două fenomene puse în evidență de Faraday:

$e_{\Gamma,t} = -\int_{S_\Gamma}\frac{\partial\overline{\mathbf{B}}}{\partial t}\overline{\mathbf{n}}dA$ – t.e.m. indusă prin transformare (pulsație);

$e_{\Gamma,m} = \oint_\Gamma\left(\overline{\mathbf{v}}\times\overline{\mathbf{B}}\right)\overline{\mathbf{dl}}$ – t.e.m. indusă prin mișcare.

B. Forme locale

Pentru domenii de continuitate şi netezime a tuturor mărimilor, aplicând membrului stâng al ultimei forme teorema lui Stokes, rezultă:

$$\int rot\overline{\mathbf{E}}\overline{\mathbf{n}}dA = -\int_{S_\Gamma}\left[\frac{\partial\overline{\mathbf{B}}}{\partial t} + rot(\overline{\mathbf{B}}\times\overline{\mathbf{v}})\right]\overline{\mathbf{n}}dA \Rightarrow rot\overline{\mathbf{E}} = -\frac{\partial\overline{\mathbf{B}}}{\partial t} + rot(\overline{\mathbf{v}}\times\overline{\mathbf{B}}) \qquad (2.73)$$

sau dacă mediile sunt imobile ($\overline{\mathbf{v}} = 0$):

$$rot\overline{\mathbf{E}} = -\frac{\partial\overline{\mathbf{B}}}{\partial t} \qquad \textit{numită a doua ecuație a lui Maxwell} \qquad (2.74)$$

Pentru suprafețe de discontinuitate se alege curba *Γ*, formată din curbele deschise C_1 și C_2, ce cuprinde această suprafață:

$$\oint_\Gamma \overline{\mathbf{E}}\cdot\overline{\mathbf{dl}} = \int_{C_1}\overline{\mathbf{E}}_1\cdot\overline{\mathbf{dl}} + \int_{c_2}\overline{\mathbf{E}}_2\cdot\overline{\mathbf{dl}} = \overline{\mathbf{E}}_1\cdot\overline{\mathbf{t}}\cdot\Delta l - \overline{\mathbf{E}}_2\cdot\overline{\mathbf{t}}\cdot\Delta l = \left(\overline{\mathbf{E}}_1 - \overline{\mathbf{E}}_2\right)\cdot\overline{\mathbf{t}}\Delta l \cong 0 \qquad (2.75)$$

Rezultă astfel că: $\left(\overline{\mathbf{E}}_1 - \overline{\mathbf{E}}_2\right)\cdot\overline{\mathbf{t}} = 0 \Rightarrow E_{1t} = E_{2t}$,

adică, rezultă că traversarea oricărei suprafețe de discontinuitate de către liniile de câmp electric se face cu conservarea componentei tangențiale a intensității câmpului.